
5. Analoge Trägermodulation

5. Analoge Trägermodulation

Motivation

Analoge Quellen liefern i.d.R. Basisbandsignale (z.B. Audio- oder Bildsignale).

Durch **analoge Trägermodulation** können Quellensignale aus dem Basisband in andere Frequenzbereiche umgesetzt werden.

Mögliche Gründe hierfür:

- Das Übertragungsverfahren bzw. das Übertragungsmedium lässt Basisbandübertragung nicht zu (z.B. Funkübertragung).
- Es sollen mehrere Kanäle im Frequenzmultiplex über ein und dasselbe Medium übertragen werden.

Definition analoger Modulationsverfahren

Ausgehend von einer cosinusförmigen **Trägerschwingung**

$$x(t) = a \cos(2\pi ft + \varphi)$$

und einem zu übertragenden Basisbandsignal $v(t)$

kann grundsätzlich unterschieden werden zwischen

- **Amplitudenmodulation:** $a = f(v(t))$
- **Frequenzmodulation:** $f = f(v(t))$
- **Phasenmodulation:** $\varphi = f(v(t))$
- **Einseitenbandmodulation:**
Mischform aus Amplituden- und Phasenmodulation
- **hybriden Verfahren,**
d.h. Kombinationen aus den o.g. Modulationsformen

Klassifikation analoger Modulationsverfahren

Gilt das **Superpositionsprinzip:**

$$v(t) = av_1(t) + bv_2(t)$$

$$\Leftrightarrow x(t) = ax_1(t) + bx_2(t),$$

so spricht man von einem **linearen Modulationsverfahren**.

Zu den *linearen* Verfahren gehören:

- Amplitudenmodulation
- Einseitenbandmodulation

nichtlineare Verfahren sind:

- Frequenzmodulation
- Phasenmodulation

Amplitudenmodulation

Amplitudenmodulation

Für ein Basisbandsignal

$$v(t) \in [-1,1]$$

ergibt sich das AM-Signal zu

$$x_{AM}(t) = (a_0 + a_1 v(t)) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

Das Verhältnis

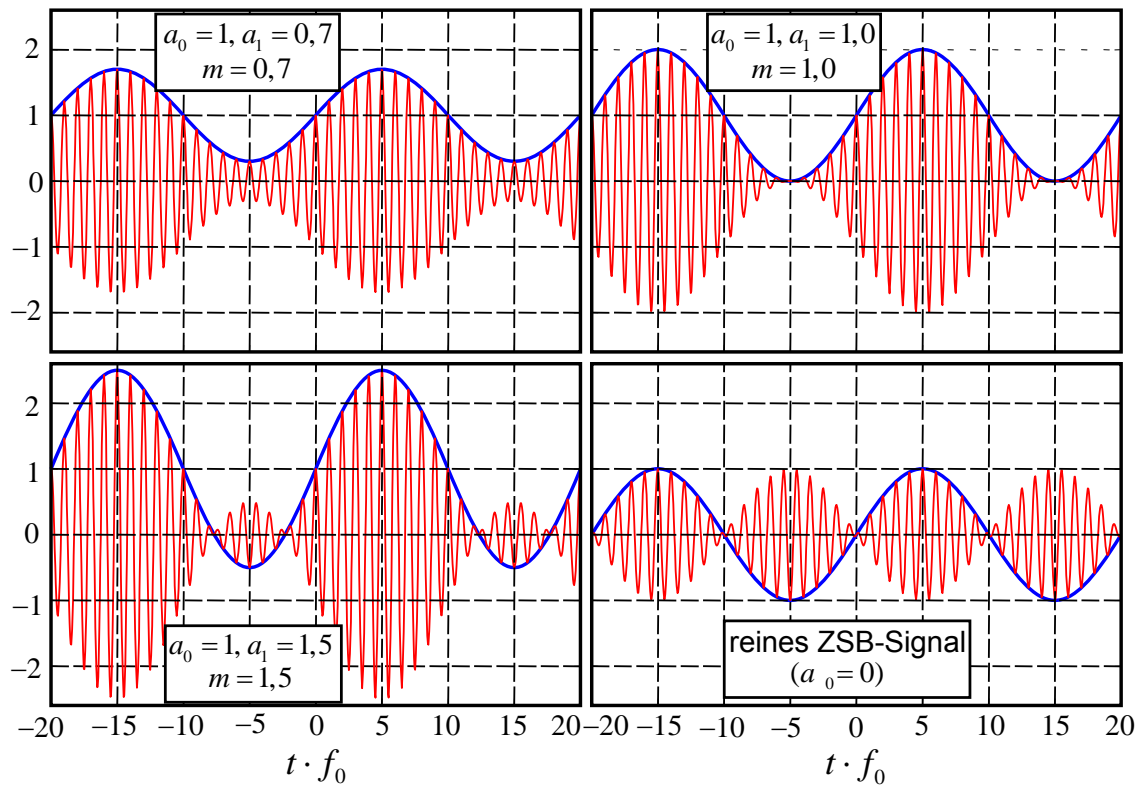
$$m = \frac{a_1}{a_0}$$

heißt **Modulationsgrad**.

Sonderfall:

Für $a_0 = 0$ ist die Trägerfrequenz im Signalspektrum nicht explizit enthalten.

Man spricht dann von **reiner Zweiseitenband-AM** oder **AM mit unterdrücktem Träger**.



Amplitudenmodulation: Spektrum

Im folgenden wird von $\varphi_0 = 0$ ausgegangen.

Das Spektrum des AM-Signals ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} x_{AM}(t) &= (a_0 + a_1 v(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ &= \text{Re} \left\{ (a_0 + a_1 v(t)) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_{AM}(f) = \mathcal{F}\{x_{AM}(t)\}$$

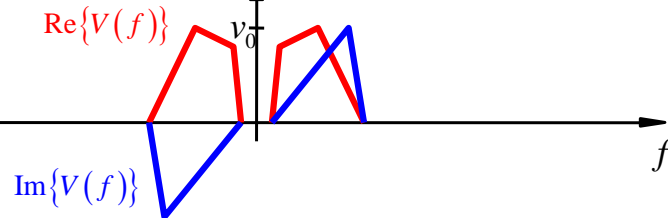
$$\begin{aligned} X_{AM}(f) &= \frac{1}{2} \left[(a_0 \delta(f - f_0) + a_1 V(f - f_0)) + (a_0 \delta(-f - f_0) + a_1 \bar{V}(-f - f_0)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[a_0 \delta(f - f_0) + a_1 V(f - f_0) + a_0 \delta(f + f_0) + a_1 V(f + f_0) \right] \end{aligned}$$

(Anmerkung: Da $v(t)$ reell ist, gilt $\bar{V}(-f) = V(f)$.)

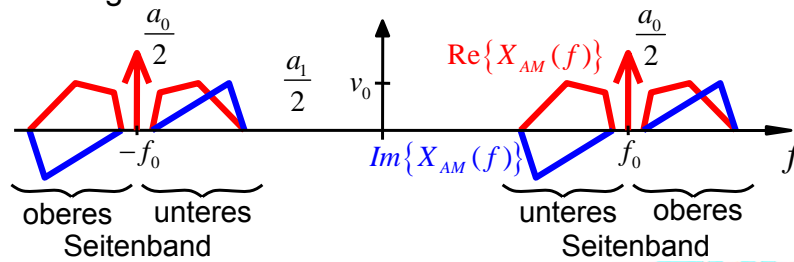
Spektrum des AM-Signals:

$$X_{AM}(f) = \frac{1}{2} [a_0 \delta(f - f_0) + a_1 V(f - f_0) + a_0 \delta(f + f_0) + a_1 V(f + f_0)]$$

Basisbandsignal:

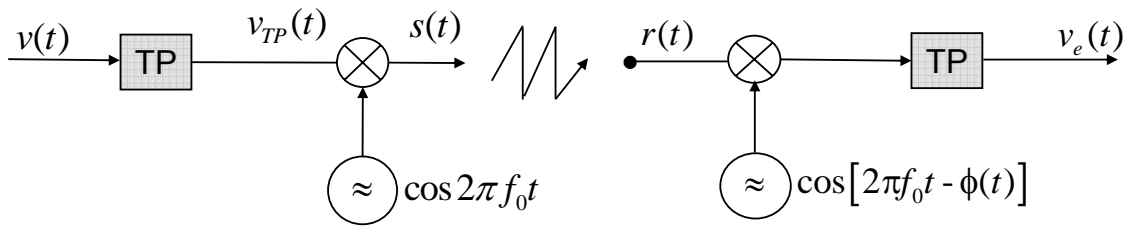


AM-Signal:



Amplitudenmodulation: Empfängerstrukturen

Anplitudenmodulation: Koherente Empfängerstruktur



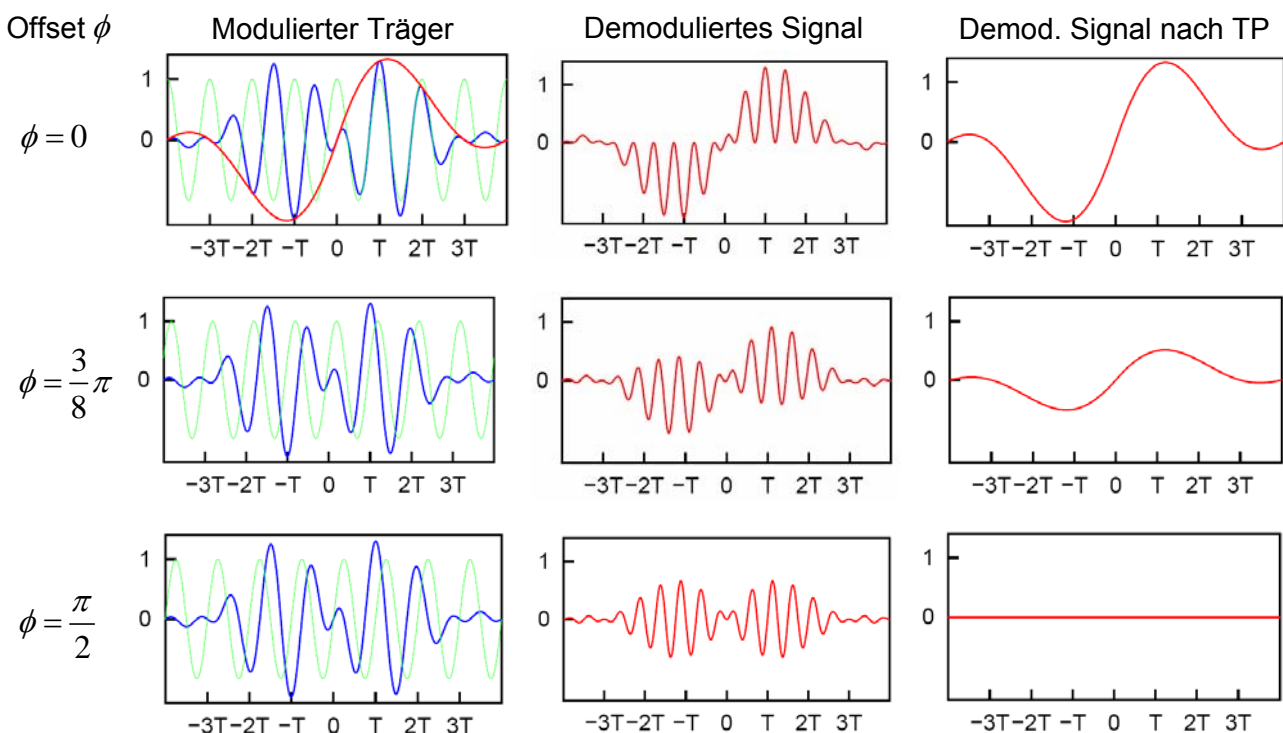
idealer TP mit Grenzfrequenz f_g

$$\begin{aligned}
 v_e(t) &= \left\{ v_{TP}(t) \cos(2\pi f_0 t) \cos[2\pi f_0 t - \phi(t)] \right\} * \left[2f_g \operatorname{si}(2\pi f_g t) \right] \\
 &= \left(\frac{1}{2} v_{TP}(t) \left\{ \cos \phi(t) + \cos[4\pi f_0 t - \phi(t)] \right\} \right) * \left[2f_g \operatorname{si}(2\pi f_g t) \right] \\
 &\stackrel{f_g \ll f_0}{=} \frac{1}{2} v_{TP}(t) \cos \phi(t)
 \end{aligned}$$

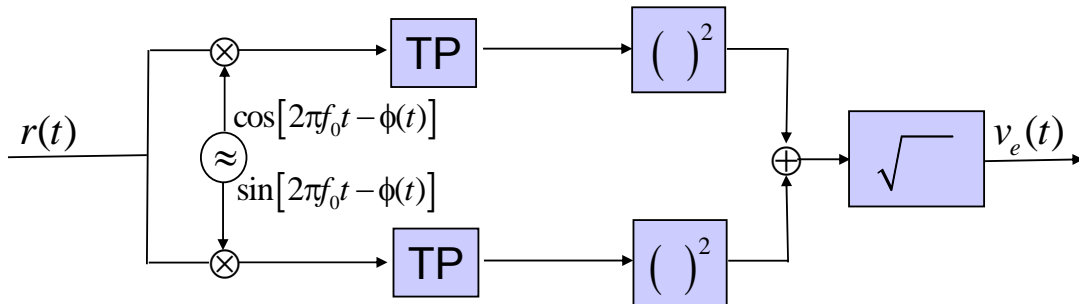
Die kohärente Demodulation erfordert die frequenz- und phasentreue Rückgewinnung des Trägers im Demodulator. Frequenzabweichungen machen sich als Schwebung bemerkbar.

Einfluss eines Phasenoffsets

Empfangssignale mit verschiedenen Offsets der Mischfrequenz



Inkohärente Empfängerstruktur



$$v_e(t) = \sqrt{\left[1/2v_{TP}(t)\cos\phi(t)\right]^2 + \left[1/2v_{TP}(t)\sin\phi(t)\right]^2}$$

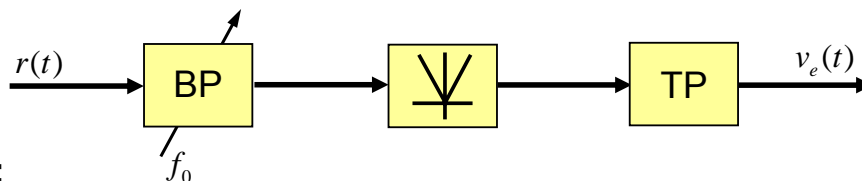
$$= 1/2|v_{TP}(t)| \Rightarrow \text{Verzerrung, wenn } v_{TP}(t) < 0.$$

Lösung: Addiere zu $v_{TP}(t)$ Gleichwerte a_0 sodass gilt: $v_{TP}(t) + a_0 > 0$.

$$\Rightarrow s(t) = v_{TP}(t)\cos 2\pi f_0 t + a_0 \cos 2\pi f_0 t \quad (\text{AM mit Träger})$$

Empfängerstrukturen zur Kanalselektion

Geradeausempfänger



Vorteil:

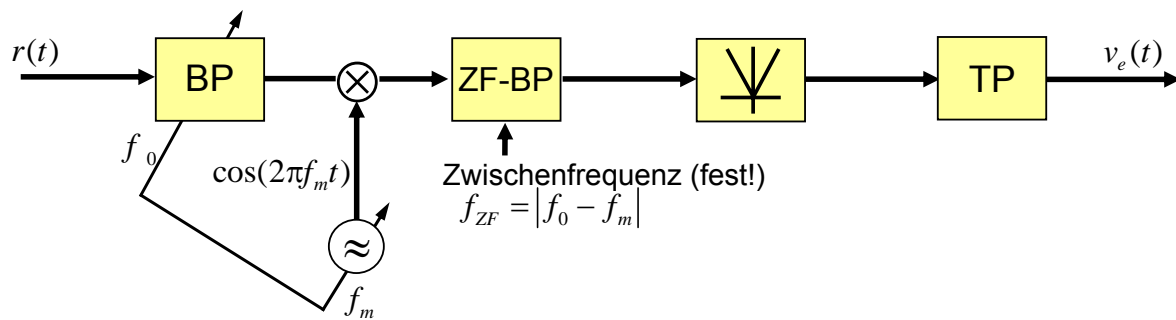
Sehr einfacher Aufbau und daher preiswert (Bsp.: Volksempfänger)

Nachteil:

Kanalselektion findet nur durch Abstimmen des Bandpassfilters auf die gewünschte Trägerfrequenz statt. Da abstimmbare und gleichzeitig schmalbandige Filter nicht einfach zu realisieren sind, muss der Nutzer meist Störungen durch benachbarte Kanäle in Kauf nehmen. Der Geradeausempfänger wird daher in kommerziellen Geräten praktisch nicht mehr eingesetzt.

Empfängerstrukturen zur Kanalselektion

Überlagerungsempfänger (Superheterodyn-Empfänger)



Ein relativ breiter Frequenzbereich um f_0 wird durch einen abstimmbaren, einfachen Bandpaß vorselektiert und mit Hilfe von f_m auf eine **feste Zwischenfrequenz** f_{ZF} heruntergemischt.

Die einstellbare Mischerfrequenz f_m bestimmt, welcher Kanal in den Bereich des festen ZF-Bandpasses fällt.

Die eigentliche Kanalselektion erfolgt durch den ZF-Bandpass.

Empfängerstrukturen zur Kanalselektion

Überlagerungsempfänger (Fortsetzung)

Vorteil:

Dadurch, dass der ZF-Bandpass auf eine feste Frequenz abgestimmt ist, kann er mehrstufig und sehr trennscharf aufgebaut werden, was eine hohe Empfangsqualität ermöglicht. Praktisch alle heutigen Empfänger (Handy, Radio, Fernseher) arbeiten nach dem Überlagerungsprinzip!

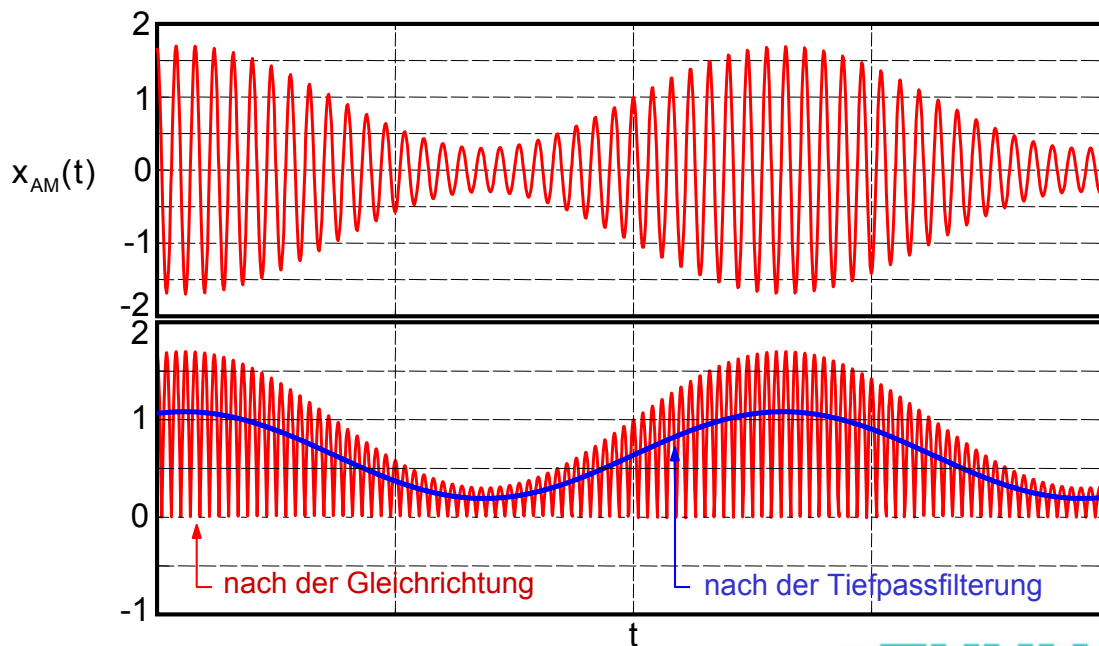
Nachteil:

Höherer Bauteileaufwand als beim Geradeausempfänger

Inkohärente Empfängerstruktur: Einhüllenden- Demodulation

Schaltungstechnisch einfache Realisierung der AM-Demodulation:

Einhüllenden-Demodulation (Hüllkurven-Demodulation).



Amplitudenmodulation: Einhüllenden-Demodulation

AM - Demodulator: (Fortsetzung)

Analytische Beschreibung der Einhüllenden-Demodulation:

Das Signal am Ausgang des Gleichrichters lautet

$$|x_{AM}(t)| = a_0 \cdot (1 + mv(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot \text{sgn}\{(1 + mv(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t)\}$$

Für $m < 1$ und $|v(t)| \leq 1$ gilt

$$1 + mv(t) > 0$$

und somit

$$\begin{aligned} |x_{AM}(t)| &= a_0 \cdot (1 + mv(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot \text{sgn}\{(\cos(2\pi f_0 t))\} \\ &= a_0 \cdot (1 + mv(t)) \cdot |\cos(2\pi f_0 t)| \end{aligned}$$

Amplitudenmodulation: Einhüllenden-Demodulation

(Fortsetzung)

AM-Demodulator: (Fortsetzung)

$$|x_{AM}(t)| = a_0 \cdot (1 + mv(t)) \cdot |\cos(2\pi f_0 t)|$$

Entwicklung von $|\cos(2\pi f_0 t)|$ in eine Fourierreihe liefert

$$|x_{AM}(t)| = a_0 \cdot (1 + mv(t)) \cdot \left[\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{3} \cos(4\pi f_0 t) - \frac{1}{15} \cos(8\pi f_0 t) + \dots \right) \right]$$

Ist das Modulationssignal bandbegrenzt auf das Intervall

$$[-f_{NF}, f_{NF}] \quad \text{mit} \quad f_{NF} < f_0,$$

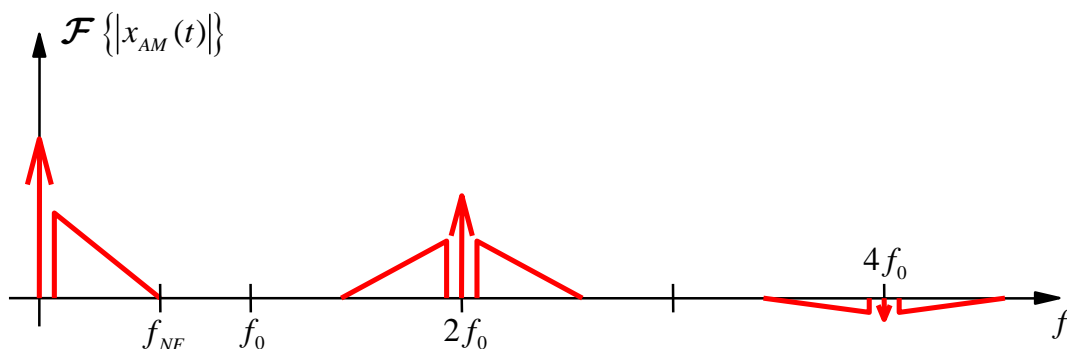
so kann das übertragene Signal durch Tiefpassfilterung fehlerfrei zurückgewonnen werden.

Amplitudenmodulation: Einhüllenden-Demodulation

(Fortsetzung)

AM-Demodulator: (Fortsetzung)

Spektrum des gleichgerichteten AM-Signals:



Amplitudenmodulation: lineare Verzerrung

Kohärente Demodulation und *Einhüllenden-Demodulation* unterscheiden sich bezüglich des Einflusses linearer Verzerrungen.

Kohärente Demodulation:

- *Lineare* Verzerrungen des AM-Signals führen nur zu *linearen* Verzerrungen des empfangenen NF-Signals.
- Die linearen Verzerrungen des NF-Signals hängen nur vom bezüglich f_0 konjugiert geraden Anteil der Kanal-Übertragungsfunktion ab.

Mit der Kanal-Übertragungsfunktion $C_{BP}(f)$ und der Definition

$$C(f) = C_{BP}(f + f_0) \quad \text{für} \quad f \in [-f_{NF}, f_{NF}]$$

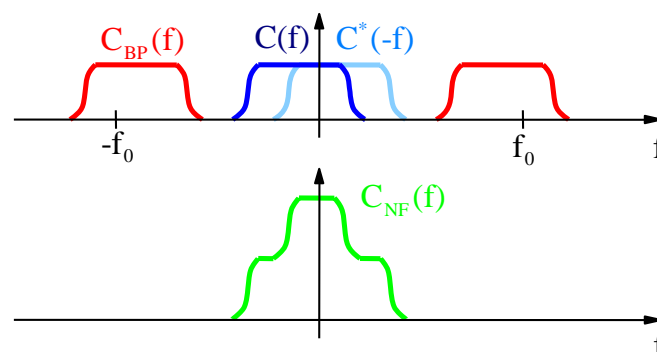
ergibt sich die äquivalente Übertragungsfunktion für das NF-Signal zu

$$C_{NF}(f) = C(f) + C^*(-f)$$

Amplitudenmodulation: lineare Verzerrungen (Fortsetzung)

Kohärente Demodulation: (Fortsetzung)

$$C_{NF}(f) = C(f) + C^*(-f)$$



Einhüllenden-Demodulation:

- Eine bezüglich f_0 konjugiert gerade Kanal-Übertragungsfunktion führt ausschließlich zu *linearen* Verzerrungen des NF-Signals.
- Ist die Übertragungsfunktion *nicht* konjugiert gerade bezüglich f_0 , resultieren *nichtlineare* Verzerrungen des NF-Signals.

Bezüglich additiver Störeinflüsse ist zu unterscheiden zwischen

- Störungen durch benachbarte Sender
- additivem Rauschen

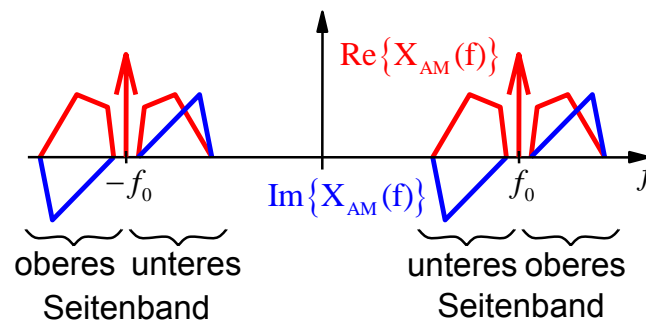
Bei kohärenter Demodulation führen additive Störungen des Bandpaßsignals auch zu rein additiver Störung des demodulierten NF-Signals.

Bei Einhüllenden-Demodulation resultieren zusätzlich nichtlineare Verzerrungen des NF-Signals!

Einseitenband-Modulation

Einseitenbandmodulation

Betrachte das Spektrum eines AM-Signals:



Ist das zu übertragene Basisbandsignal reell, so lässt sich das untere Seitenband (USB) aus dem oberen (OSB) konstruieren und umgekehrt.

→ Durch Übertragung nur eines der Seitenbänder (**Einseitenbandmodulation, SSB (Single Side Band)**) wird der Bandbreitebedarf gegenüber AM halbiert.

Einseitenbandmodulation (Fortsetzung)

Zur Erinnerung:

Mit der Hilberttransformierten des Basisbandsignals

$$\hat{v}(t) = \mathcal{H}\{v(t)\}$$

ergibt sich das analytische Signal $v^+(t)$ zu

$$v^+(t) = v(t) + j\hat{v}(t)$$

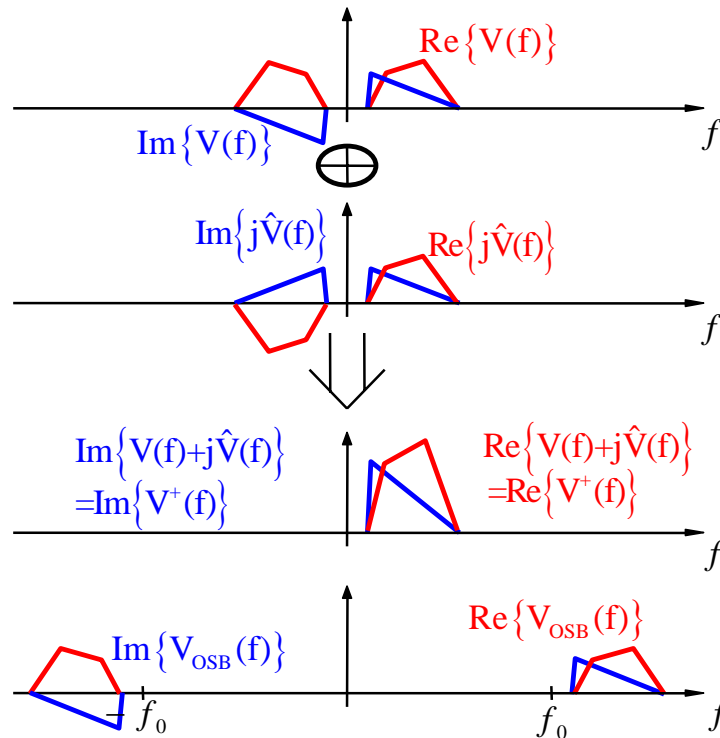
Definitionsgleichungen:

$$\begin{aligned} x_{OSB}(t) &= RE\left\{v^+(t) \cdot e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)}\right\} \\ &= RE\left\{(v(t) + j\hat{v}(t)) \cdot e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)}\right\} \\ &= v(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - \hat{v}(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{USB}(t) &= RE\left\{(v(t) - j\hat{v}(t)) \cdot e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)}\right\} \\ &= v(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) + \hat{v}(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Einseitenbandmodulation (Fortsetzung)

Veranschaulichung der Definitionsgleichungen (OSB) im Frequenzbereich:



Einseitenbandmodulation (Fortsetzung)

Variante:

Einseitenbandmodulation mit Trägerzusatz:

$$\begin{aligned}
 x_{OSB}(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \left(a_0 + a_1 (v(t) + j\hat{v}(t)) \right) e^{j2\pi f_0 t + \varphi_0} \right\} \\
 &= a_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) + a_1 \cdot (v(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - \hat{v}(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)) \\
 x_{OSB}(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \left(a_0 + a_1 (v(t) - j\hat{v}(t)) \right) e^{j2\pi f_0 t + \varphi_0} \right\} \\
 &= a_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) + a_1 \cdot (v(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) + \hat{v}(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0))
 \end{aligned}$$

Der Trägerzusatz kann als Referenz für die kohärente Demodulation dienen.

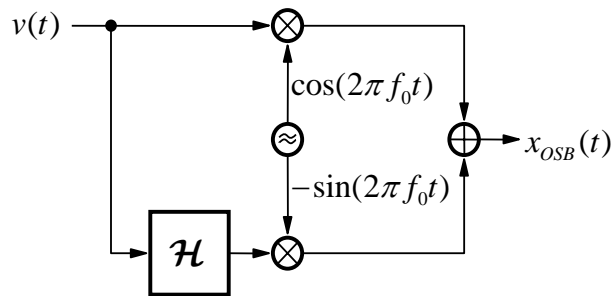
Einseitenbandmodulation: Modulator

Betrachte im Folgenden nur OSB-Signale *ohne* Trägerzusatz!

Für die praktische Erzeugung von Einseitenbandsignalen bieten sich mehrere Möglichkeiten:

Möglichkeit 1:

Direkte Umsetzung der Definitionsgleichung unter Verwendung eines realen Hilberttransformators.

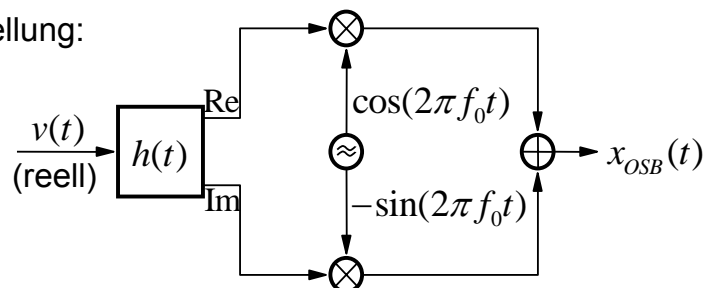


Diese Realisierung ist vollständig äquivalent mit einer komplexen Hochpassfilterung (für USB: Tiefpassfilterung) im Basisband und anschließender Quadraturmodulation.

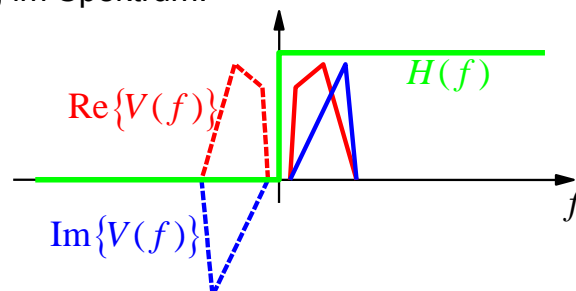
Einseitenbandmodulation: Modulator (Fortsetzung)

Möglichkeit 1: (Fortsetzung)

Äquivalente Darstellung:



Veranschaulichung im Spektrum:

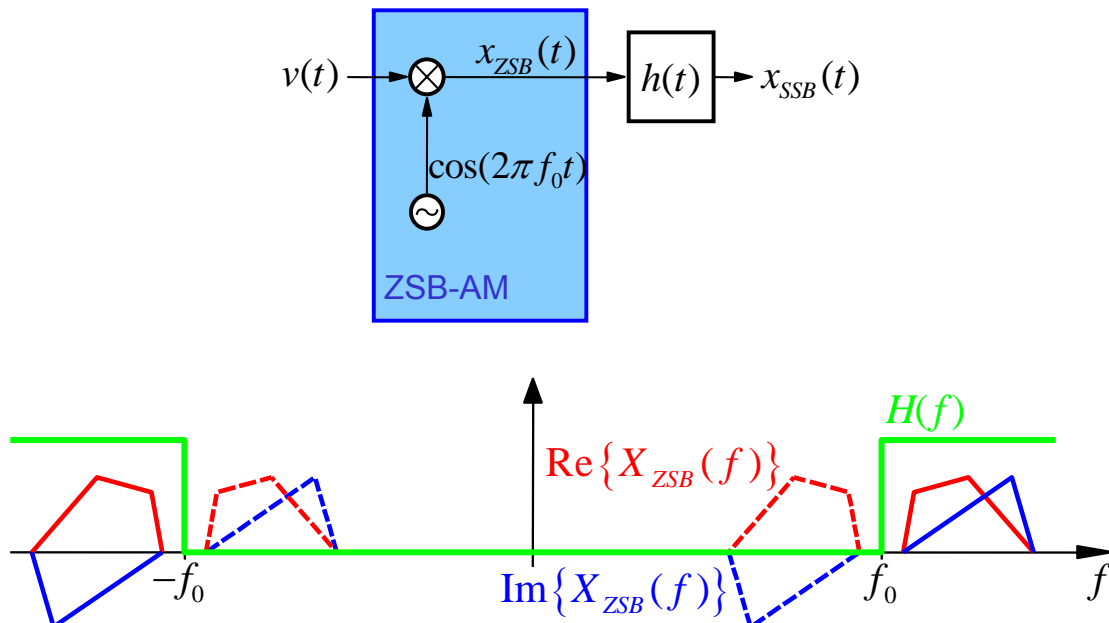


Die analogtechnische Umsetzung der Möglichkeit 1 ist vergleichsweise aufwendig.

Einseitenbandmodulation: Modulator (Fortsetzung)

Möglichkeit 2:

Reelle Hochpassfilter (OSB) bzw. Tiefpassfilter (USB) eines ZSB-AM-Signals.



Einseitenbandmodulation: Modulator (Fortsetzung)

Komplikation:

In der Praxis lassen sich weder der ideale Hilberttransformator, noch Filter mit idealer Rechteckflanke realisieren.

- Unkritisch, wenn $v(t)$ keine Spektralanteile in der Nähe von $f=0$ aufweist.
In diesem Fall genügt auch eine endliche Flankensteilheit des Filters.

Aber:

Wie können auch Gleichanteile bzw. niederfrequente Anteile in $v(t)$ verzerrungsfrei übertragen werden?

Lösung:

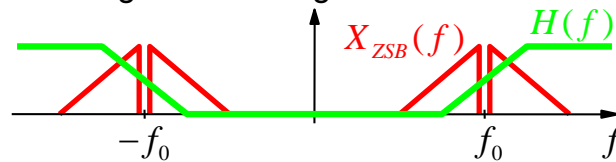
Verwendung von Filtern mit Nyquistflanken führt auf die **Restseitenbandmodulation**.

Einseitenbandmodulation: Modulator (Fortsetzung)

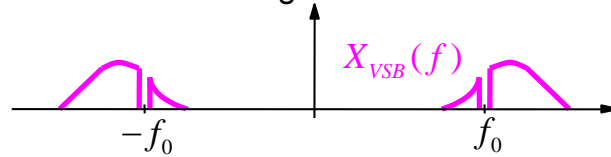
Restseitenbandmodulation:

Aufgrund der Flankensymmetrie des verwendeten Filters wird das NF-Signal bei der kohärenten Demodulation exakt rekonstruiert.

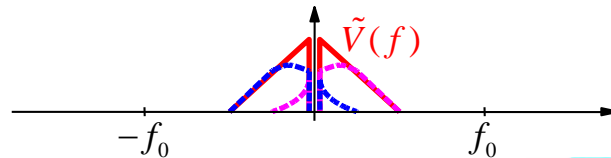
Filterung des ZSB-Signals:



Restseitenband-Signal:



kohärente Demodulation:



Einseitenbandmodulation: Modulator (Fortsetzung)

Restseitenbandmodulation: (Fortsetzung)

Anwendungsbeispiel:

Bei der analogen Fernsehübertragung ist die Übertragung eines Gleichanteils ($\hat{=}$ mittlere Bildhelligkeit) erforderlich.

AM kommt aufgrund des hohen Bandbreitebedarfs nicht in Betracht.

→ Restseitenbandmodulation

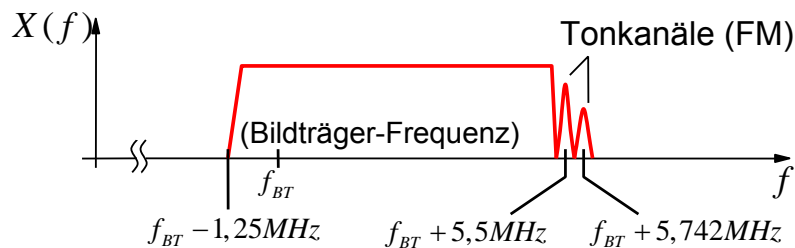
Die exakte Nyquistfilterung wird allerdings erst empfängerseitig vorgenommen.

Einseitenbandmodulation: Modulator (Fortsetzung)

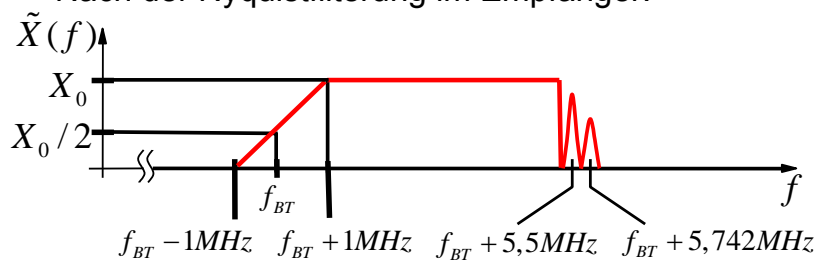
Restseitenbandmodulation: (Fortsetzung)

Anwendungsbeispiel: analoge Fernsehübertragung

Spektrum des Sendesignals:



Nach der Nyquistfilterung im Empfänger:



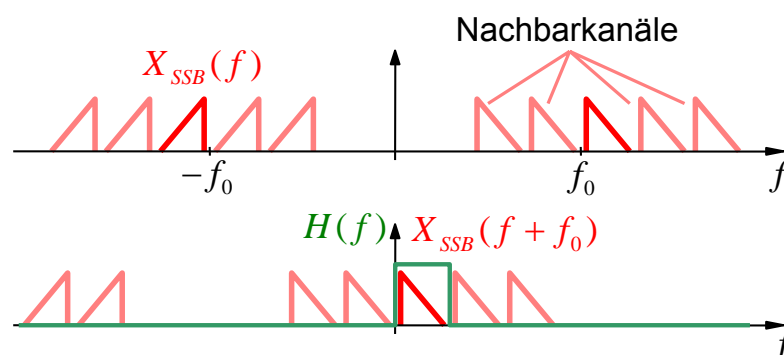
Einseitenbandmodulation: Demodulator

Einseitenbandsignale erfordern kohärente Demodulation.

(Ausnahme: Bei der sogenannten **kompatiblen Einseitenbandmodulation** ist Einhüllenden-Demodulation möglich, allerdings auf Kosten eines erheblich erhöhten Bandbreitebedarfs.)

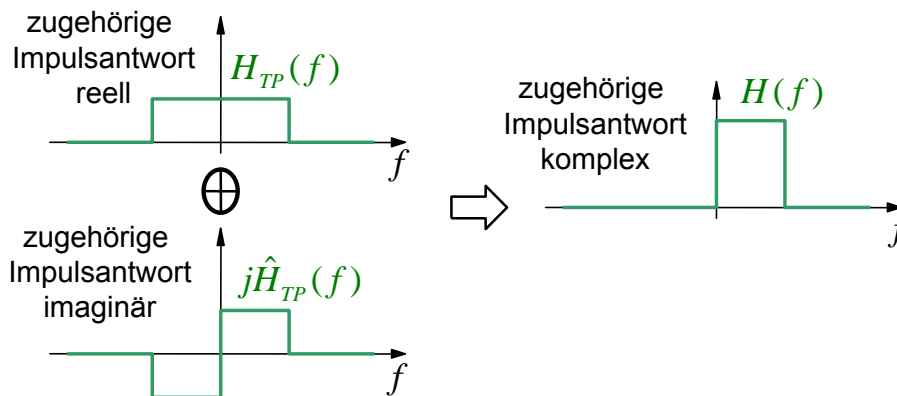
Besonderheit:

Das bzgl. f_0 unsymmetrische Spektrum erfordert im Basisband zur Unterdrückung von Nachbarkanälen eine komplexe Filterung.



Einseitenbandmodulation: Demodulator (Fortsetzung)

Realisierung des komplexen Filters:



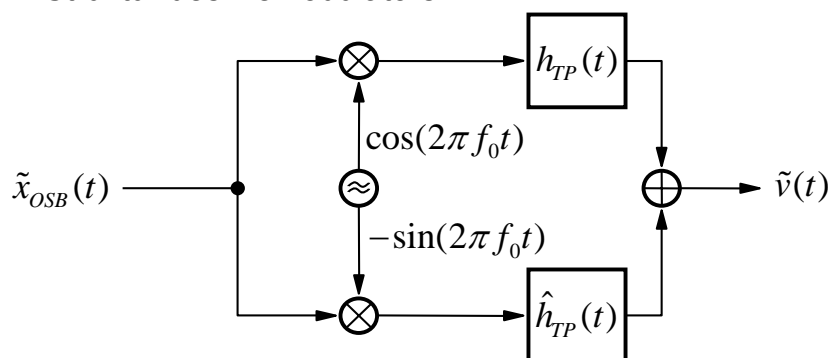
Für *Restseitenbandmodulation* ist der Durchlassbereich des komplexen Filters entsprechend anders zu wählen. Der rein reelle und der rein imaginäre Anteil hängen dann nicht über die Hilberttransformation zusammen.

Einseitenbandmodulation: Demodulator (Fortsetzung)

Das (reelle) NF-Signal ergibt sich als

$$\begin{aligned} v(t) &= \operatorname{Re}\left\{h(t) * \left(x_{OSB}(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t}\right)\right\} \\ &= \operatorname{Re}\{h(t)\} * \left(x_{OSB}(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)\right) - \operatorname{Im}\{h(t)\} * \left(x_{OSB}(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)\right) \\ &= h_{TP}(t) * \left(x_{OSB}(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)\right) - \hat{h}_{TP}(t) * \left(x_{OSB}(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)\right) \end{aligned}$$

→ Struktur des Demodulators:



Für das untere Seitenband gelten jeweils analoge Betrachtungen.

Einseitenbandmodulation: lineare Verzerrungen

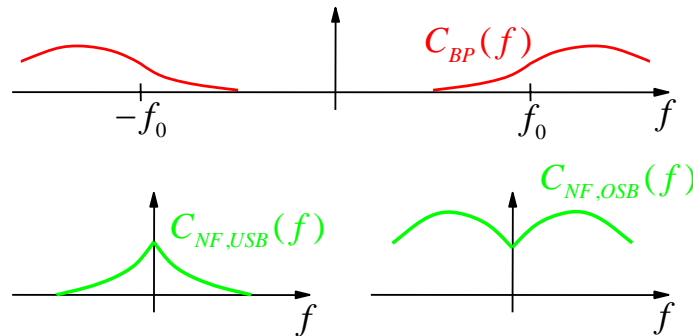
Lineare Verzerrungen im Übertragungskanal führen zu linearen Verzerrungen im NF-Signal.

Bei OSB-Übertragung gilt:

$$C_{NF,OSB}(f) = \begin{cases} 2C_{BP}(f_0 + f) & \text{für } f > 0 \\ 2C_{BP}^*(f_0 - f) & \text{für } f < 0 \end{cases}$$

Bei USB-Übertragung gilt entsprechend:

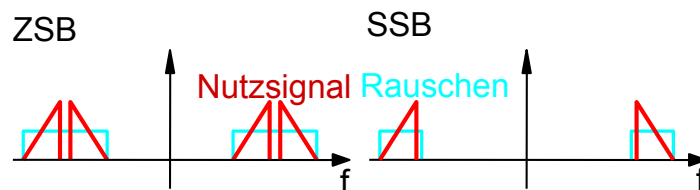
$$C_{NF,USB}(f) = \begin{cases} 2C_{BP}^*(f_0 - f) & \text{für } f > 0 \\ 2C_{BP}(f_0 + f) & \text{für } f < 0 \end{cases}$$



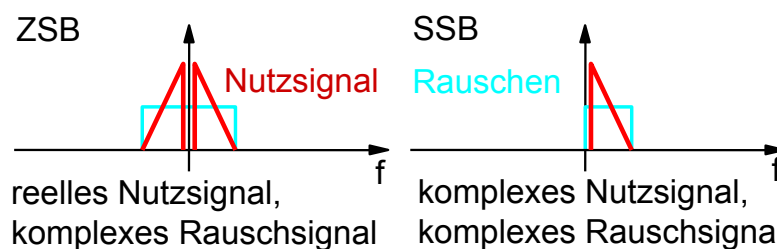
Einseitenbandmodulation: additive Störungen

Vergleiche den Einfluß additiver Rauschstörungen bei SSB-Modulation und bei AM:

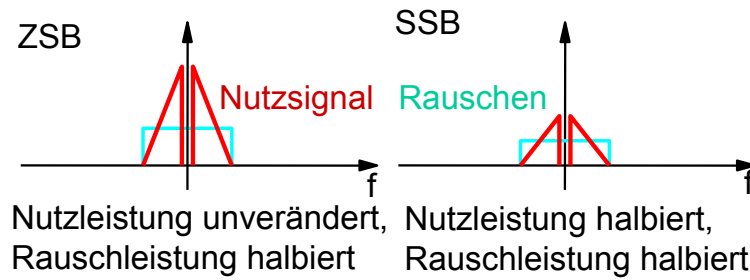
Ausgangspunkt: gleiches S/N im Kanal. Nutz- und Rauschsignal rein reell.



Abmischen ins Basisband: S/N bleibt jeweils unverändert



Realteilbildung:



→ Bei reiner Zweiseitenband-AM beträgt der **Rauschübersetzungsfaktor**

$$\gamma_{ZSB} = \frac{(S/N)_{NF}}{(S/N)_{HF}} = 2$$

bei Einseitenbandmodulation ergibt sich

$$\gamma_{SSB} = \frac{(S/N)_{NF}}{(S/N)_{HF}} = 1$$

Phasenmodulation / Frequenzmodulation

Phasenmodulation / Frequenzmodulation

Die Definitionsgleichung der Phasenmodulation lautet

$$x_{PM}(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t + \Delta\phi v(t) + \phi_0),$$

wobei $\Delta\phi$ als **Phasenhub** bezeichnet wird.

Die Frequenzmodulation kann auf die Phasenmodulation zurückgeführt werden. Allgemeiner Ansatz:

$$x_{FM}(t) = a_0 \cos(\psi(t) + \phi_0)$$

Die **Momentanfrequenz** ist definiert als

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi(t)}{dt}$$

und soll variiert werden gemäß

$$f(t) = f_0 + \Delta F v(t)$$

Phasenmodulation / Frequenzmodulation (Fortsetzung)

Die Momentanfrequenz $f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi(t)}{dt}$ soll gemäß

$f(t) = f_0 + \Delta F v(t)$ variiert werden. ΔF heißt **Frequenzhub**.

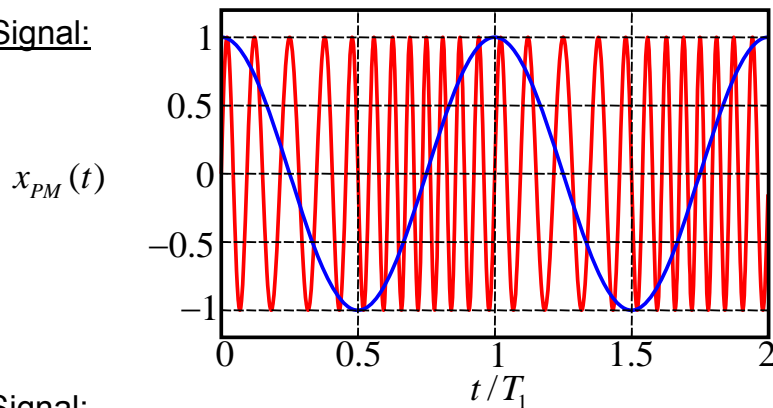
Gleichsetzen und Integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi(t)}{dt} &= f_0 + \Delta F v(t) \\ \psi(t) &= 2\pi \left(f_0 t + \Delta F \int_0^t v(\xi) d\xi \right) + \psi_0 \end{aligned}$$

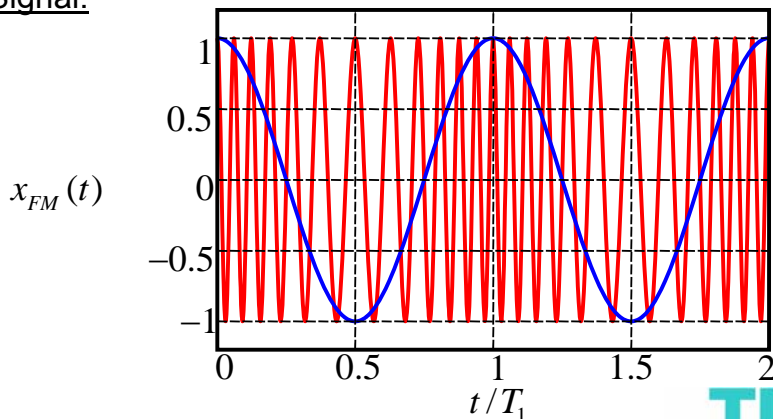
→ Definitionsgleichung der Frequenzmodulation:

$$x_{FM}(t) = a_0 \cos \left(2\pi \left(f_0 t + \Delta F \int_0^t v(\xi) d\xi \right) + \phi_0 \right)$$

PM-Signal:



FM-Signal:



Phasen- / Frequenzmodulation: Spektrum

Die Spektren winkelmodulierter Signale sind nur für spezielle Modulationssignale geschlossen zu berechnen.

Beispiel:

Berechnung des FM-Signalspektrums für cosinusförmige Modulation.

$$v(t) = \cos(2\pi f_1 t)$$
$$\rightarrow x_{FM}(t) = a_0 \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\Delta F}{f_1} \sin(2\pi f_1 t) + \varphi_0\right)$$

Der Phasenhub $\eta = \frac{\Delta F}{f_1}$ wird als **Modulationsindex** bezeichnet.

Im Folgenden wird der Einfachheit halber von $a_0 = 1$ und $\varphi_0 = 0$ ausgegangen.

$$x_{FM}(t) = \cos(2\pi f_0 t + \eta \sin(2\pi f_1 t))$$

Das zugehörige analytische Signal:

$$x_{FM}^+(t) = e^{j2\pi f_0 t} e^{j\eta \sin(2\pi f_1 t)}$$

lässt sich über eine Fourierreihenentwicklung auch darstellen als

$$x_{FM}^+(t) = e^{j2\pi f_0 t} \cdot \sum_{v=-\infty}^{\infty} c_v e^{j2\pi v f_1 t} \quad \text{mit} \quad c_v = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi v f_1 t} e^{j\eta \sin(2\pi f_1 t)} d(f_1 t)$$

(Fourier-Koeffizienten)

Mit der Substitution $x = 2\pi f_1 t$ geht c_v über in die Definitionsgleichung der Besselfunktion erster Art und v -ter Ordnung:

$$J_v(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\eta \sin(x) - vx)} dx$$

$$c_v = J_v(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\eta \sin(x) - vx)} dx$$

eingesetzt in $x_{FM}^+(t) = e^{j2\pi f_0 t} \cdot \sum_{v=-\infty}^{\infty} c_v e^{j2\pi v f_1 t}$

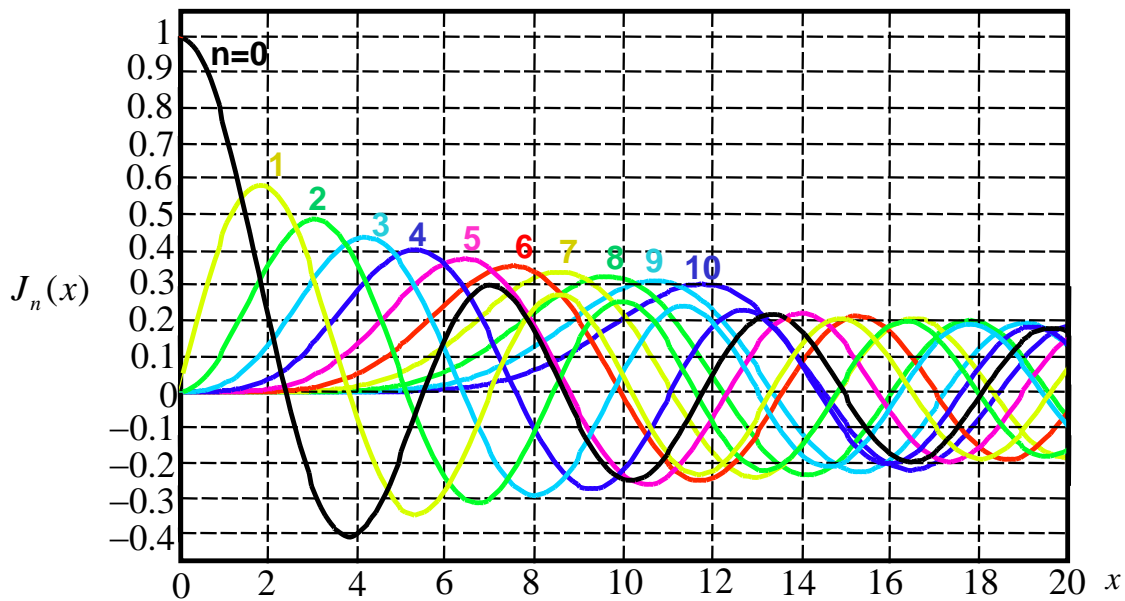
führt auf $x_{FM}^+(t) = e^{j2\pi f_0 t} \cdot \sum_{v=-\infty}^{\infty} J_v(\eta) e^{j2\pi v f_1 t}$

$$= J_0(\eta) e^{j2\pi f_0 t} + \sum_{v=1}^{\infty} J_v(\eta) \left(e^{j2\pi(f_0 + v f_1)t} + (-1)^v e^{j2\pi(f_0 - v f_1)t} \right),$$

Transformation in den Frequenzbereich liefert

$$X_{FM}^+(f) = J_0(\eta) \delta(f - f_0) + \sum_{v=1}^{\infty} J_v(\eta) \left(\delta(f - (f_0 + v f_1)) + (-1)^v \delta(f - (f_0 - v f_1)) \right)$$

Besselfunktion erster Art der Ordnung 0 bis 10:



$$X_{FM}^+(f) = J_0(\eta)\delta(f - f_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{\nu}(\eta) \left(\delta(f - (f_0 + \nu f_1)) + (-1)^{\nu} \delta(f - (f_0 - \nu f_1)) \right)$$

Phasen - / Frequenzmodulation: Spektrum (Fortsetzung)

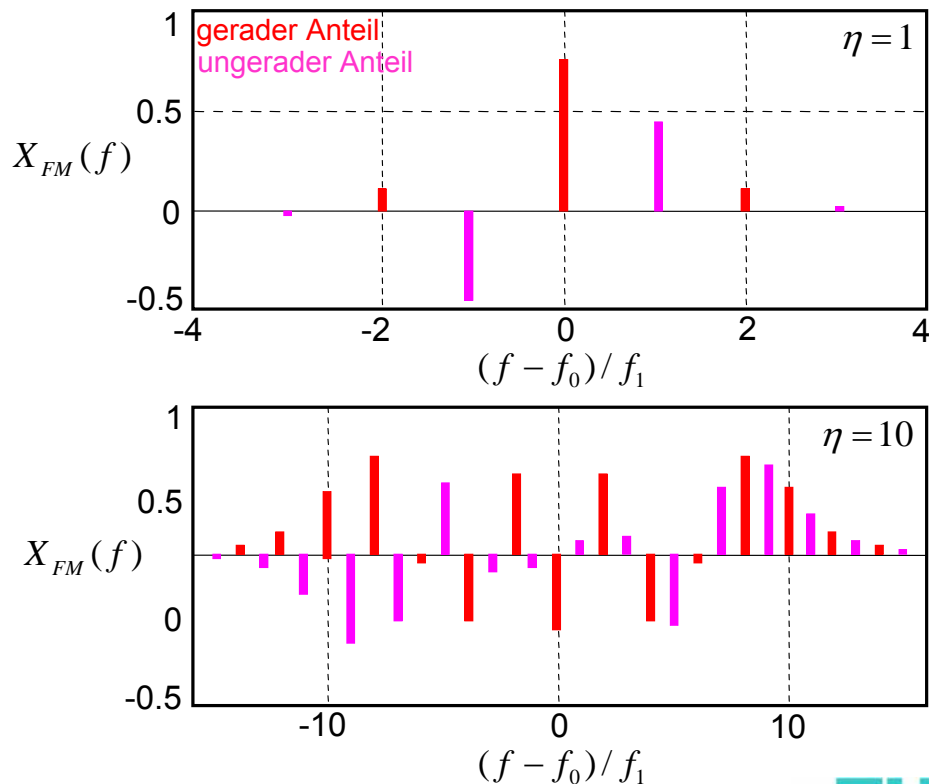
$$X_{FM}^+(f) = J_0(\eta)\delta(f - f_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{\nu}(\eta) \left(\delta(f - (f_0 + \nu f_1)) + (-1)^{\nu} \delta(f - (f_0 - \nu f_1)) \right)$$

Ein sinusförmig modulierte FM-Signal besitzt also ein Linienspektrum mit den folgenden Eigenschaften:

- Das Spektrum ist nicht streng bandbegrenzt.
- Die Trägerfrequenz f_0 ist im Spektrum explizit enthalten.
- Die übrigen Spektrallinien sind beidseitig des Trägers äquidistant im Abstand f_1 angeordnet.
- Die Linien bei $f_0 \pm n \cdot f_1$ mit *geraden* n weisen eine *gerade* Symmetrie bzgl. f_0 auf, für *ungerade* n besteht eine *ungerade* Symmetrie.

Phasen - / Frequenzmodulation: Spektrum (Fortsetzung)

Beispiele:



Phasen - / Frequenzmodulation: Spektrum (Fortsetzung)

Prinzipiell ist das FM-Spektrum nicht bandbegrenzt.

Frage:

Auf welche Bandbreite darf das FM-Signal in der Praxis begrenzt werden, ohne dass inakzeptable Verfälschungen des NF-Signals auftreten?

Abschätzung:

Bei cosinusförmiger Modulation liegen ca. 99 % der Gesamtleistung des FM-Signals innerhalb der *Carson-Bandbreite*

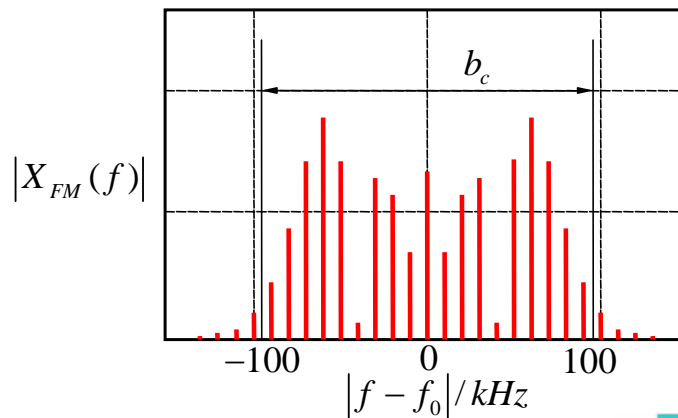
$$b_c = 2f_1(\eta + 2) = 2(\Delta F + 2f_1)$$

Carson-Bandbreite: (Fortsetzung)

$$b_c = 2f_1(\eta + 2) = 2(\Delta F + 2f_1)$$

Wird das FM-Signal auf b_c bandbegrenzt, bleibt die Qualität des demodulierten NF-Signals akzeptabel.

Beispiel: $f_1 = 10 \text{ kHz}$, $\Delta F = 75 \text{ kHz}$



Phasen - / Frequenzmodulation: Modulator/Demodulator

Modulator:

Zur FM- bzw. PM-Modulation wird eine jeweils geeignete Oszillatorschaltung direkt durch das NF-Signal in ihrer Frequenz bzw. der Phasenlage verstimmt.

Beispiel: FM-Modulator



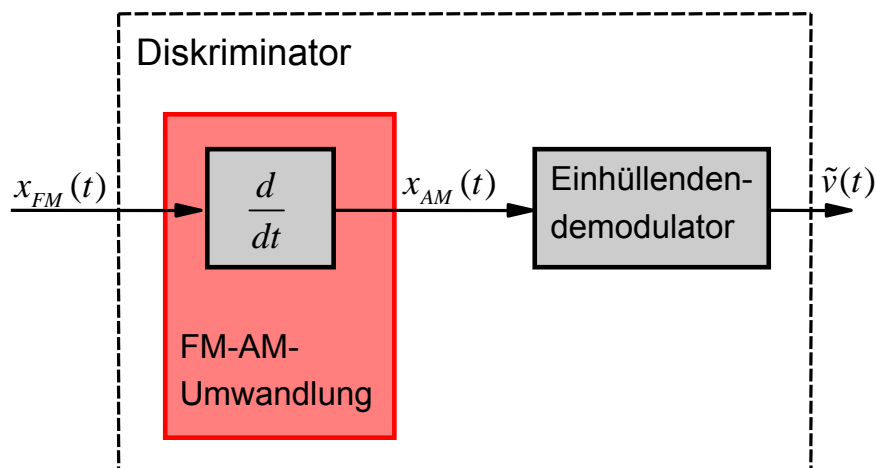
Demodulator:

Für die Demodulation von FM-Signalen sind vor allem drei Verfahren von Bedeutung:

- FM-AM-Umwandlung mit anschließender Einhüllenden-Demodulation
- PLL-Demodulator
- digitale Demodulation

Phasen - / Frequenzmodulation: Demodulator

FM-AM-Umwandler mit Einhüllenden-Demodulation



Die FM-AM-Umwandlung führt die Aufgabe der FM-Demodulation auf eine AM-Demodulation zurück. Nach Abtrennung des überlagerten Gleichanteils wird das Quellensignal $v(t)$ am Ausgang des AM-Demodulators zurückgewonnen.

Phasen - / Frequenzmodulation: Demodulator (Fortsetzung)

FM-AM-Umwandlung: (Fortsetzung)

FM-AM-Umwandlung kann im Prinzip durch zeitliche Ableitung erreicht werden.

$$\text{Mit } x_{FM}(t) = \cos(\varphi(t)) \quad \text{und} \quad \varphi(t) = 2\pi \left(f_0 t + \Delta F \cdot \int_0^t v(\xi) d\xi \right)$$

$$\begin{aligned} \text{gilt } \frac{dx_{FM}(t)}{dt} &= -\frac{d\varphi(t)}{dt} \cdot \sin(\varphi(t)) \\ &= -2\pi \underbrace{\left(f_0 + \Delta F \cdot v(t) \right)}_{w(t)} \cdot \sin \left(2\pi \left(f_0 t + \Delta F \int_0^t v(\xi) d\xi \right) \right) \end{aligned}$$

FM-AM-Umwandlung (Fortsetzung)

$$\frac{dx_{FM}(t)}{dt} = -w(t) \cdot \sin \left(2\pi \left(f_0 t + \Delta F \int_0^t v(\xi) d\xi \right) \right)$$

$$\text{mit } w(t) = 2\pi (f_0 + \Delta F \cdot v(t))$$

Durch Einhüllenden-Demodulation gewinnt man

$$\frac{w(t)}{2\pi\Delta F} = \frac{f_0}{\Delta F} + v(t)$$

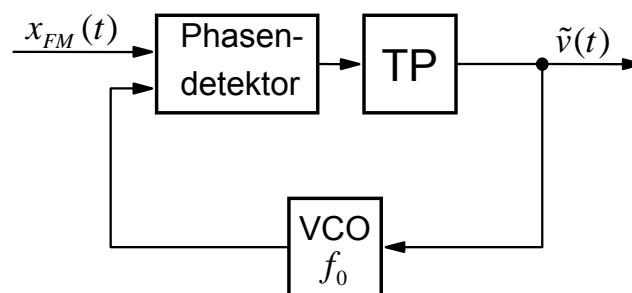
NF-Signal mit (i.a. sehr hohem) überlagerten Gleichanteil.

In der Praxis werden zur FM-AM-Umwandlung in aller Regel

Verfahren eingesetzt, die nicht zu einem derart hohen Gleichanteil

in der Einhüllenden führen.

PLL-Demodulator:



Funktionsweise:

- Der **Phasendetektor** liefert am Ausgang eine Spannung, die monoton von der Phasendifferenz der Eingangssignale abhängt (praktische Realisierung: z.B. Multiplizierer).
- Beträgt die Phasendifferenz *nicht* $\pi/2$, so ist die Ausgangsspannung des Phasendetektors von 0 verschieden und bewirkt eine Änderung der VCO-Frequenz.

PLL-Demodulator: (Fortsetzung)

- Die Änderung der VCO-Frequenz wirkt der detektierten Abweichung von der Phasendifferenz $\pi/2$ entgegen.
- Die VCO-Frequenz stellt sich auf die Momentanfrequenz des FM-Signals ein, so dass sich eine konstante Phasenbeziehung einstellt.
- Die Steuerspannung des VCO ist proportional zu dessen Momentanfrequenz und damit auch zum modulierten NF-Signal.

Digitale Demodulation:

Grundidee: A/D-Wandlung des ins Basisband abgemischten FM-Signals und rein digitale Weiterverarbeitung der i.a. komplexen Abtastwerte durch

- digitale Nachbildung analoger Demodulationstechniken oder
- Verfahren, die im Analogen nur schwer zu realisieren sind.

Vorteile:

- keine Abstimmung erforderlich
- kein temperatur- oder alterungsabhängiges Verhalten

Nachteile:

- relativ hoher Hardwareaufwand
- erhöhter Leistungsbedarf

Phasen - / Frequenzmodulation: lineare Verzerrung

Betrachte die komplexe Einhüllende eines **winkelmodulierten**,
d.h. frequenz- oder phasenmodulierten Signals:

$$s_{WM}(t) = e^{j\varphi_0} e^{j\varphi_0(t)}$$

Nach Übertragung über einen linearen Kanal ergibt sich

$$\tilde{s}_{WM}(t) = e^{j\varphi_0} e^{j\varphi_0(t)} * c_{TP}(t) = e^{j\varphi_0} e^{j\varphi_0(t)} * (c_{Tr}(t) + jc_{Ti}(t))$$

Es resultieren also **nichtlineare** Verzerrungen der Momentanphase
und der Amplitude:

$$\tilde{\varphi}(t) = \arg \left\{ c_{Tr}(t) * \cos \varphi(t) - c_{Ti}(t) * \sin \varphi(t) + j \left(c_{Ti}(t) * \cos \varphi(t) + c_{Tr}(t) * \sin \varphi(t) \right) \right\}$$

$$a(t) = \left[\left(c_{Tr}(t) * \cos \varphi(t) - c_{Ti}(t) * \sin \varphi(t) \right)^2 + \left(c_{Ti}(t) * \cos \varphi(t) + c_{Tr}(t) * \sin \varphi(t) \right)^2 \right]^{1/2}$$

Phasen - / Frequenzmodulation: lineare Verzerrungen (Forts.)

Die Schwankungen in der Signal**amplitude** wirken sich auf das
demodulierte NF-Signal nicht aus.

Die Verzerrung der Momentanphase führt unmittelbar zu einer
nichtlinearen Verzerrung des NF-Signals:

$$\text{PM:} \quad \tilde{v}(t) = \frac{1}{\Delta\phi} \tilde{\varphi}(t) + \varphi_0$$

$$\text{FM:} \quad \tilde{v}(t) = \frac{1}{2\pi\Delta F} \frac{d\tilde{\varphi}}{dt}$$

$\tilde{\varphi}(t)$ kann nur für Sonderfälle (z.B. sinusförmige Modulation)
geschlossen berechnet werden.

Abhilfe:

Näherungslösungen oder numerische Berechnung durch Simulation.

Die linearen Kanalverzerrungen können prinzipiell durch adaptive lineare Entzerrung vor der Demodulation kompensiert werden.

Aber:

Im allgemeinen steht kein Referenzsignal zur Einstellung der Entzerrkoeffizienten zur Verfügung.

Lösungsansatz:

Die linearen Verzerrungen führen wie gezeigt auf eine zusätzliche AM-Modulation des FM-Signals.

Beim **Constant Modulus Algorithmus (CMA)** werden die Entzerrkoeffizienten adaptiv so eingestellt, dass die Amplitudenschwankungen am Entzerrerausgang minimiert werden.

Phasen - / Frequenzmodulation: additive Störungen

Im Folgenden wird nur die Störung der *FM-Übertragung* durch additives weißes Rauschen der Rauschleistungsdichte N_0 (im BP-Bereich) betrachtet. Die komplexe Einhüllende des gestörten Empfangssignals lautet:

$$\tilde{s}_{FM}(t) = a_{FM} \cdot e^{j\varphi(t)} + r(t)$$

$$\text{mit } \varphi(t) = 2\pi\Delta F \int_0^t v(x) dx + \varphi_0$$

Durch Einführung eines modifizierten Rauschensterms $\tilde{r}(t)$ mit

$$\tilde{r}(t) = r(t)e^{j\varphi(t)} = \tilde{r}_{re} + \tilde{j}r_{im}$$

kann $\tilde{r}_{FM}(t)$ geschrieben werden als

$$\tilde{s}_{FM}(t) = (a_{FM} + \tilde{r}(t)) \cdot e^{j\varphi(t)}$$

Für kleine Frequenzhübe haben $r(t)$ und $\tilde{r}(t)$ näherungsweise gleiche spektrale Eigenschaften.

Phasen - / Frequenzmodulation: additiver Störungen

$$\tilde{s}_{FM}(t) = (a_{FM} + \tilde{r}(t)) e^{j\phi(t)}$$

Die Demodulation lässt sich darstellen als

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= \text{Im} \left\{ \frac{\dot{\tilde{s}}_{FM}(t)}{\tilde{s}_{FM}(t)} \right\} \\ &= \text{Im} \left(\frac{\dot{\tilde{r}}(t) e^{j\phi(t)} + (a_{FM} + \tilde{r}(t)) j\dot{\phi}(t) e^{j\phi(t)}}{(a_{FM} + \tilde{r}(t)) e^{j\phi(t)}} \right) \\ &= \text{Im} \left\{ \frac{\dot{\tilde{r}}(t)}{a_{FM} + \tilde{r}(t)} \right\} + \dot{\phi}(t) \end{aligned}$$

Für $\tilde{r}(t) \ll a_{FM}$ gilt die Näherung

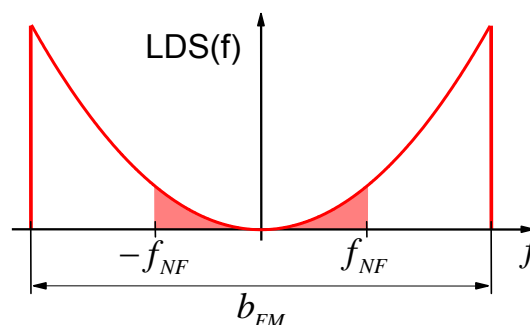
$$\tilde{v}(t) \approx \frac{1}{a_{FM}} \cdot \frac{d\tilde{r}_{\text{Im}}(t)}{dt} + 2\pi\Delta F v(t)$$

Phasen - / Frequenzmodulation: additive Störungen

$$\tilde{v}(t) \approx \frac{1}{a_{FM}} \cdot \frac{d\tilde{r}_{\text{Im}}(t)}{dt} + 2\pi\Delta F v(t)$$

Das Leistungsdichtespektrum der Störgröße im demodulierten Signal ergibt sich somit zu

$$\frac{1}{a_{FM}^2} S_{\tilde{r}_{\text{Im}}} \tilde{r}_{\text{Im}}(f) \cdot 4\pi^2 f^2 = \begin{cases} \frac{4\pi^2 f^2}{a_{FM}^2} N_0 & \text{für } |f| \leq b_{FM}/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Phasen - / Frequenzmodulation: additive Störungen

Gemäß der Carson-Formel kann b_{FM} abgeschätzt werden zu

$$b_{FM} = 2f_{NF} (\eta_{\min} + 2)$$

Im allgemeinen ist b_{FM} deutlich größer als $2f_{NF}$, so dass im Zusammenhang mit dem quadratischen Störspektrum nur ein sehr geringer Anteil der Störleistung auf die NF-Nutzbandbreite entfällt.

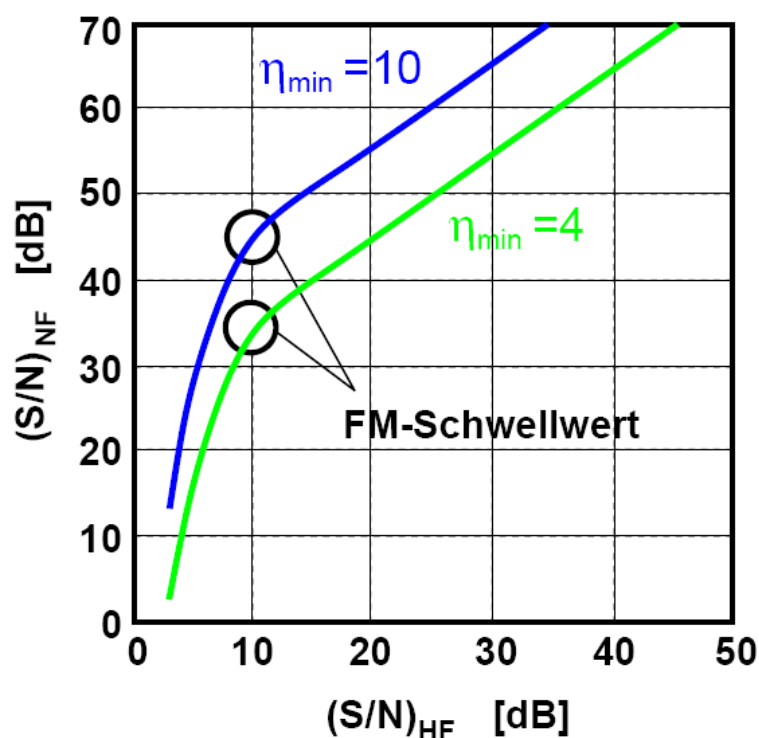
→ bei hohen S/N -Werten ergibt sich bei FM ein sehr günstiges Rauschübersetzungsverhältnis zwischen HF- und NF-Bereich.

Aber:

Abrupte Verschlechterung des Rauschübersetzungsverhältnisses im Bereich niedriger $(S/N)_{HF}$ - Werte (**Schwellwerteffekt**)

Phasen - / Frequenzmodulation: additive Störungen

Schwellwerteffekt bei FM-Übertragung:



Empfängerstrukturen

Unabhängig vom verwendeten Modulationsverfahren (AM, SSB, FM, PM) ist im Empfänger die Aufgabe der **Kanalselektion** zu bewältigen.

Diesbezüglich sind im wesentlichen zwei Grundstrukturen zu unterscheiden:

Geradeusempfänger:

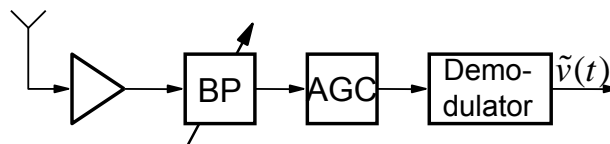
Selektion durch Filterung des HF-Signals mit abstimmbaren Bandpass

Superheterodynempfänger:

Umsetzung des Empfangssignals auf eine **Zwischenfrequenz** und Filterung mit einem nicht abstimmbaren ZF-Bandpass

Empfängerstrukturen (Fortsetzung)

Geradeusempfänger:



Die Kanalselektion findet im HF-Bereich durch einen abstimmbaren Bandpass statt.

Nachteil:

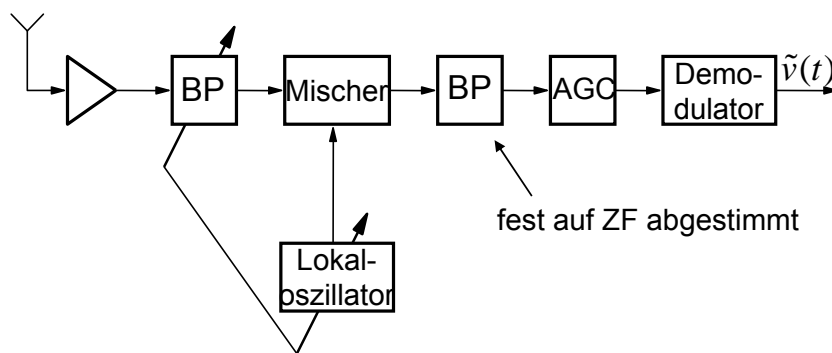
Abstimmbare Bandpässe mit hinreichend hoher Güte sind nur sehr aufwendig zu realisieren. Zudem muss die Bandbreite i.a. sehr klein gegenüber der Mittelfrequenz sein.

Abhilfe:

Umsetzung des Empfangssignals auf eine niedrigere feste **Zwischenfrequenz (ZF)** ermöglicht die Selektion mit einem fest abgestimmten Bandpass. (hohe Güte einfach zu realisieren durch mehrere Filter in Reihe)

→ **Superheterodyn-** oder **Überlagerungsempfänger**

Superheterodyn-Empfänger:



Nur zur **Spiegelfrequenzunterdrückung** wird ein abstimmbarer Bandpass vergleichsweise geringer Güte benötigt.

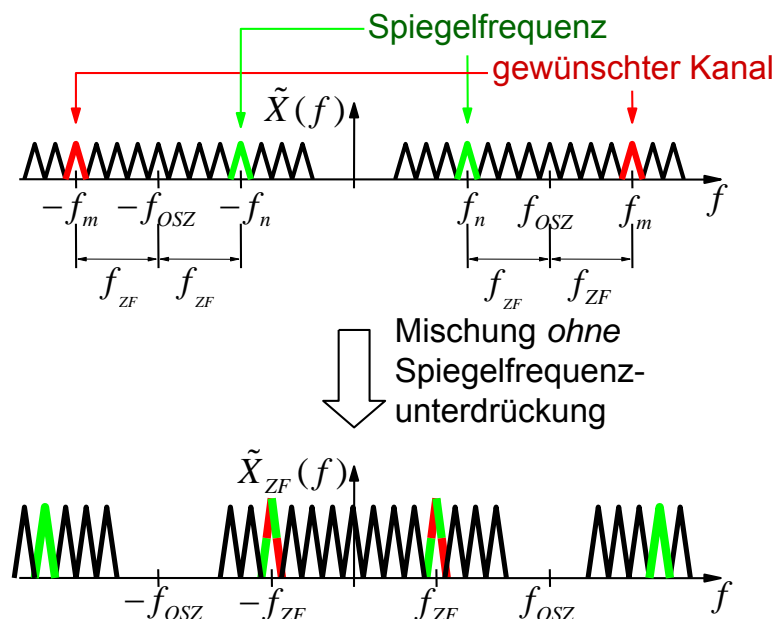
Die Kanalwahl erfolgt durch Verstimmung des **Lokaloszillators**. Die Kanalselektion erfolgt immer bei der Zwischenfrequenz durch einen fest eingestellten Bandpass.

Die Oszillatorfrequenz legt fest, welcher Kanal in den Durchlassbereich des ZF-Bandpasses fällt.

Empfängerstrukturen (Fortsetzung)

Superheterodyn-Empfänger: (Fortsetzung)

Störungen durch Spektralanteile bei der sogenannten **Spiegelfrequenz** können nur durch Filterung vor dem Mischer unterdrückt werden.



Übersicht analoger Modulationsverfahren

Übersicht analoger Modulationsverfahren

	Vorteile	Nachteile
AM mit Trägerzusatz	<ul style="list-style-type: none">• Einhüllenden - Demodulation möglich• geringerer Bandbreitebedarf als FM	<ul style="list-style-type: none">• zus. Sendeleistung für den Träger erforderlich• schlechtes Rausch-übersetzungsverhältnis• höherer Bandbreitebedarf als SSB
ZSB-AM	<ul style="list-style-type: none">• Bandbreitebedarf geringer als bei FM• gutes Rauschübersetzungsverhältnis	<ul style="list-style-type: none">• kohärente Demodulation erforderlich• höherer Bandbreitebedarf als SSB

	Vorteile	Nachteile
SSB	<ul style="list-style-type: none">• sehr geringer Bandbreitebedarf	<ul style="list-style-type: none">• kohärente Demodulation erforderlich• hohe Anforderungen an die Oszillatorstabilität• schlechteres Rauschübersetzungsverhältnis als ZSB-AM
FM / PM	<ul style="list-style-type: none">• sehr gutes Rauschübersetzungsverhältnis bei hohem S/N	<ul style="list-style-type: none">• sehr hoher Bandbreitebedarf

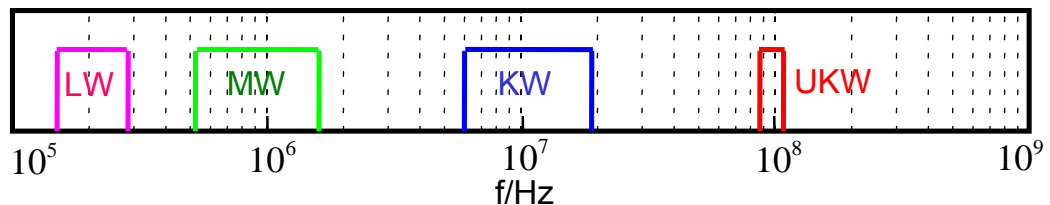
6. Systembeispiele

6. Systembeispiele

Analoger Hörrundfunk

Für analogen Hörrundfunk genutzte Frequenzbänder:

Langwelle:	150 bis 285	kHz
Mittelwelle:	525 bis 1605	kHz
Kurzwelle:	6 bis 19	MHz
Ultrakurzwelle:	87 bis 108	MHz



Auf LW, MW und KW wird AM mit einer Übertragungsbandbreite von 9 kHz pro Kanal verwendet.

Im UKW-Bereich kommt FM mit Übertragungsbandbreiten von 300-400 kHz zur Anwendung.

Systembeispiel: UKW-Hörrundfunk

Kanalaufteilung:

- 55 Hauptkanäle im 300 kHz- Raster
- Zwischenkanäle jeweils um ± 100 kHz versetzt zu den Hauptkanälen
- Frequenzzuweisung erfolgt derart, dass Sender mit überlappendem Versorgungsbereich mindestens um 400 kHz versetzt arbeiten.

Anforderungen:

- rauscharme Übertragung von Audiosignalen im Frequenzbereich 30 Hz bis 15 kHz
- Möglichkeit der Übertragung von Stereosignalen bei gleichzeitiger Kompatibilität zu Mono-Empfängern

UKW-Hörrundfunk: Preemphase / Deemphase

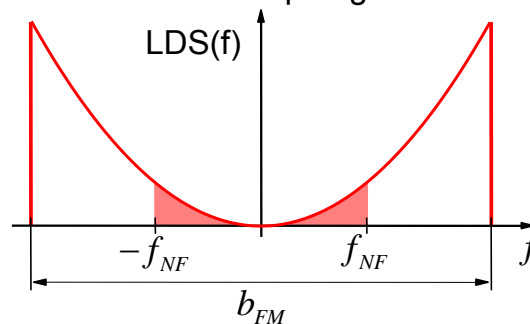
Weißes Rauschen im HF-Bereich führt zu einem quadratischen Rauschleistungsdichtespektrum im NF-Bereich (siehe Bild).

→ Anstieg der Rauschleistungsdichte zu hohen Frequenzen.

Aber:

Gerade im Bereich hoher Frequenzen wird Rauschen vom menschlichen Gehör gut wahrgenommen.

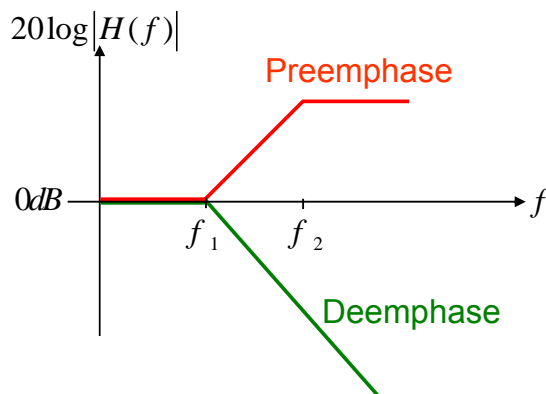
Rauschleistungsdichte im UKW-Empfänger:



UKW-Hörrundfunk: Preemphase / Deemphase

Abhilfe:

Preemphase, also Anhebung der hohen Frequenzanteile des NF-Signals im Sender, Deemphase im Empfänger

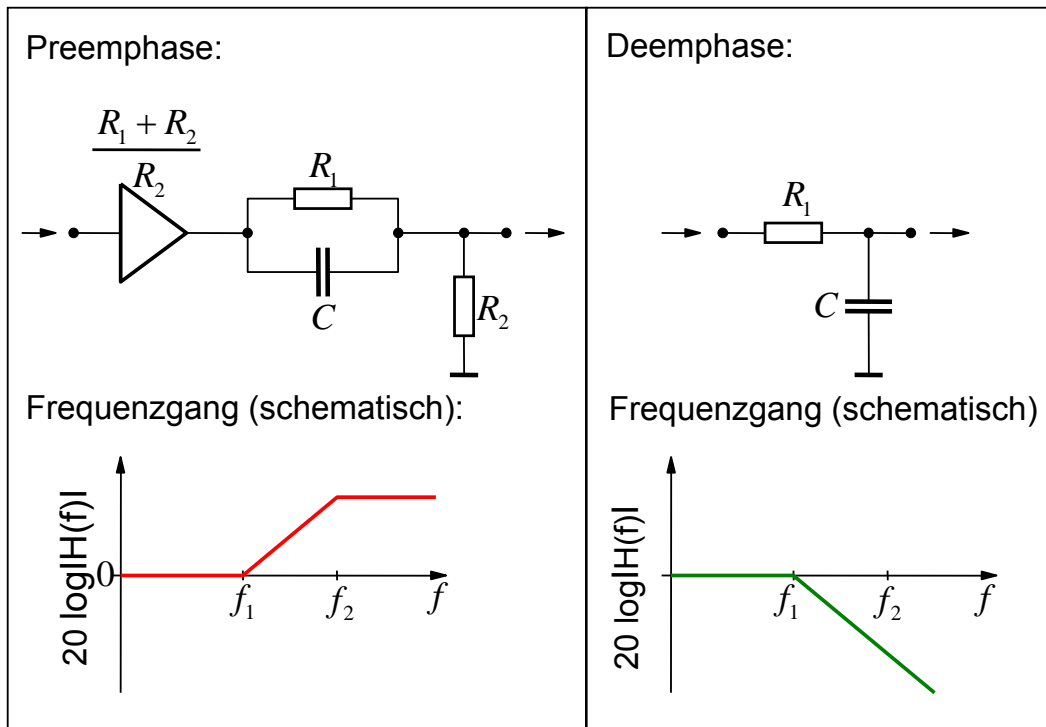


$$f_1 = 3,2 \text{ kHz}$$

$$f_2 = \text{Außerhalb Audio-Bereich}$$

Beachte:

Die Preemphase erhöht die Leistung des NF-Signals, nicht aber die des FM-Signals. Der Rauschabstand im demodulierten NF-Signal erhöht sich, ebenso jedoch die FM-Bandbreite.



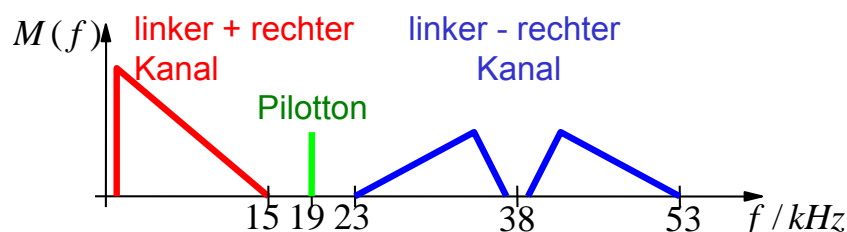
UKW-Hörrundfunk: Stereophonie

Forderung:

Stereo-Rundfunksendungen sollen auch mit Mono-Radiogeräten empfangen werden können.

→ Das demodulierte Stereosignal muss das Monosignal (= Summensignal aus rechtem und linkem Kanal) in der originalen Frequenzlage (30 Hz bis 15 kHz) enthalten. Die zum Stereoempfang *zusätzlich* benötigten Signalanteile müssen sich auf den Frequenzbereich oberhalb 15 kHz beschränken.

→ Spektrum des **Stereo-Multiplex-Signals**:



Frage:

Wie können aus dem demodulierten Stereo-Multiplex-Signal rechter und linker Stereokanal zurückgewonnen werden?

Möglichkeit 1:

- Trennung von Summen- und Differenzsignal mittels Filterung
- kohärente ZSB-Demodulation des Differenzsignals

Addition der resultierenden Signale $(x_1(t) + x_r(t))$ und $(x_1(t) - x_r(t))$ liefert $2x_1(t)$, Subtraktion liefert entsprechend $2x_r(t)$.

Möglichkeit 2:

Das Stereo-Multiplex-Signal kann dargestellt werden als

$$m(t) = x_1(t) + x_r(t) + (x_1(t) - x_r(t)) \cdot \cos(2\pi f_H t)$$

mit der Hilfsträgerfrequenz

$$f_H = 2f_{PILOT} = 38 \text{ kHz}$$

Bei Abtastung mit der Frequenz $2f_H$ gilt für die Abtastwerte $m_i = m(i/(2f_H))$

$$\begin{aligned} m_{2n} &= x_1(n/f_H) + x_r(n/f_H) + (x_1(n/f_H) - x_r(n/f_H)) \cdot \cos(2\pi n) \\ &= 2x_1(n/f_H) \end{aligned}$$

mit $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Entsprechend gilt auch:

$$m_{2n+1} = 2x_r((2n+1)/2f_H)$$

Möglichkeit 2: (Fortsetzung)

$$m_{2n} = 2x_1(n/f_H)$$

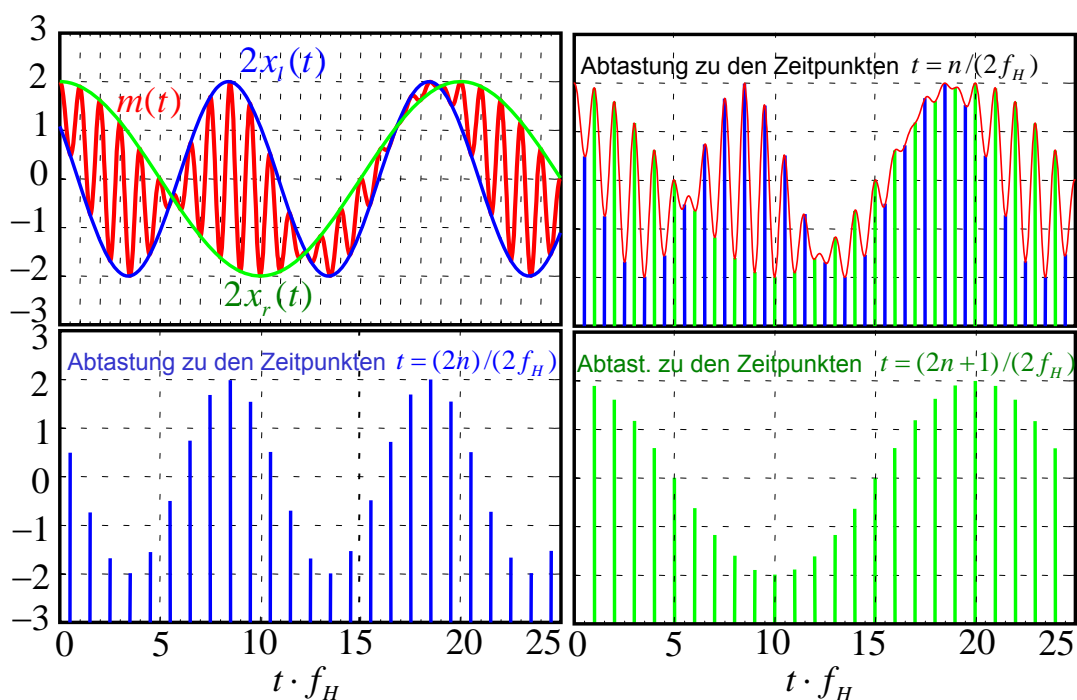
$$m_{2n+1} = 2x_r((2n+1)/(2f_H))$$

Aus den beiden Teil-Abtastfolgen können durch Tiefpassfilterung die kontinuierlichen Signale des rechten und des linken Kanals zurückgewonnen werden.

Möglichkeit 2 wird auch als **Schalterdecodierung** bezeichnet.

UKW-Hörrundfunk: Stereophonie (Fortsetzung)

Möglichkeit 2: (Fortsetzung)



Die folgenden Fragestellungen wurden in der Vorlesung diskutiert:

2. Signale und Übertragungssysteme

- Wie können Signale und Systeme im Zeit- und Frequenzbereich, im Bandpass- und im Tiefpassbereich eingesetzt werden?
- Wodurch ist ein verzerrungsfreier Übertragungskanal charakterisiert?
- Welche Störeinflüsse können in realen Übertragungskanälen auftreten und wie werden sie beschrieben?

3. Analoge Übertragung im Basisband

- Wie können die Auswirkungen linearer Verzerrungen und additiver Störungen bei analoger Basisbandübertragung gemindert werden?

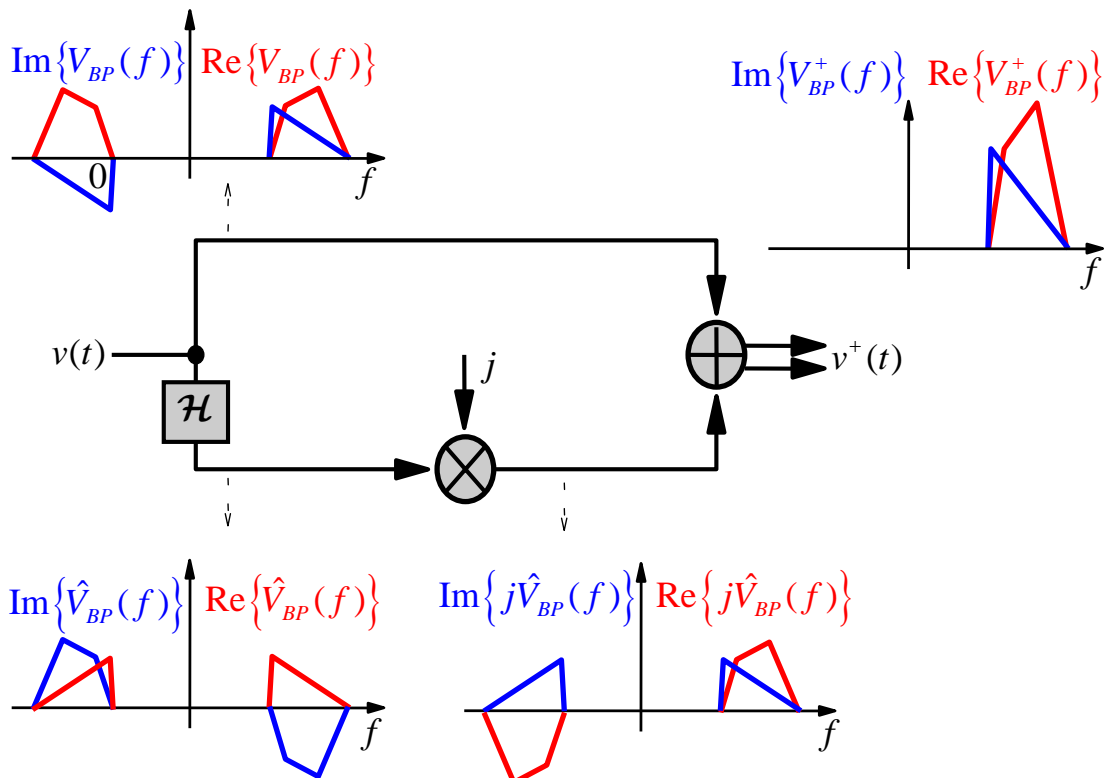
4. Digitale Übertragung im Basisband

- Wie können analoge Signale in zeit- und / oder amplitudendiskrete Signale überführt werden?
- Wie ist das Spektrum eines digitalen Basisbandsignals zu beschreiben?
- Nach welchen Gesichtspunkten ist bei digitaler Übertragung die Impulsform festzulegen?
- Was ist bei digitaler Basisbandübertragung über gestörte Kanäle zu beachten?
- Wie können lineare Verzerrungen kompensiert werden?
- Wie kann im Empfänger der Symboltakt zurückgewonnen werden?

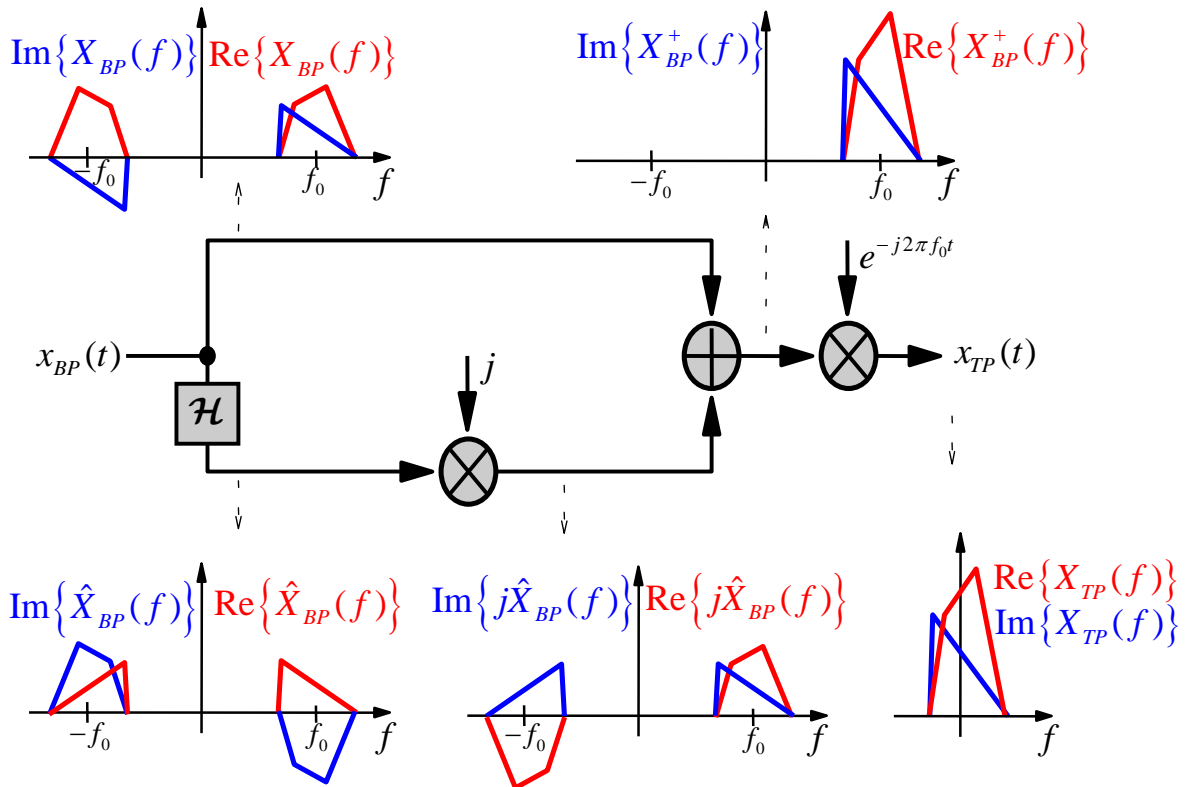
5. Analoge Trägermodulation

- Welche analogen Modulationstechniken gibt es und wie werden sie analytisch beschrieben?
- Welche spektralen Eigenschaften und welche spezifischen Vor- und Nachteile haben sie?
- Wie können Modulatoren / Demodulatoren realisiert werden?
- Wie machen sich Kanaleinflüsse im demodulierten Signal bemerkbar?
- Welche Überlegungen sind unabhängig vom Modulationsverfahren von Bedeutung für den Entwurf der Empfängerstruktur?

Hilbertstransformation zur Erzeugung eines analytischen Signals



Quadraturmischer zur Erzeugung eines äquivalenten Basisbandsignals



Zusammenhang zwischen frequenz- u. phasenmoduliertem Signal

